Aula 09

Movimento oscilatório I

Sumário

Oscilações

Movimento Harmónico Simples (MHS)

A Lei da Força no Movimento Harmónico Simples

Movimentos Periódicos

Um movimento é ***periódico*** se todas as suas características se repetem em intervalos de tempo iguais

Ao intervalo de tempo mínimo em que as características do movimento se repetem, dá-se o nome de **período**

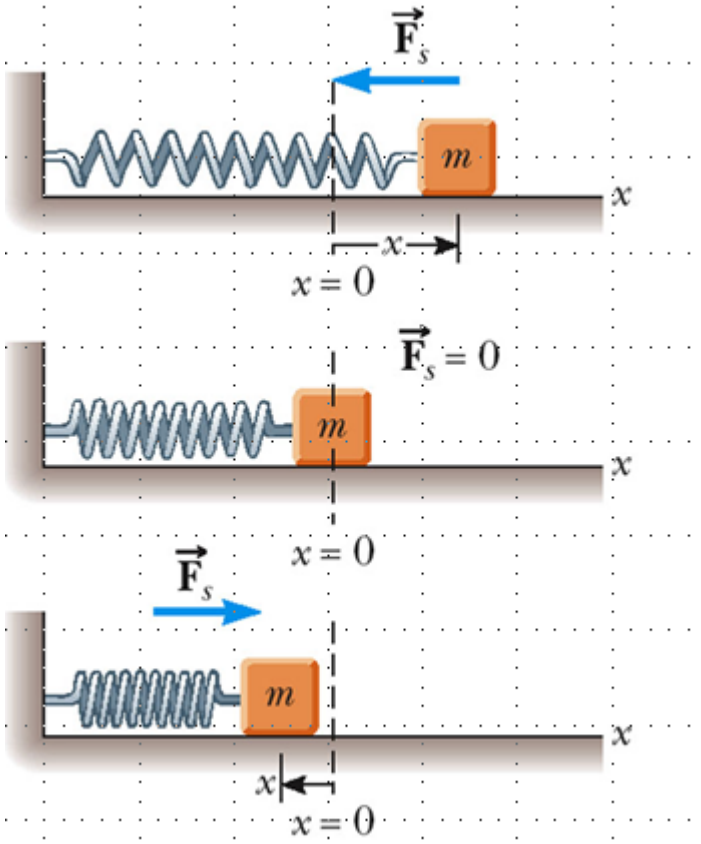
Um tipo especial de movimento periódico ocorre quando a força que actua num corpo é proporcional à distância do corpo a uma posição de equilíbrio

Se a força está sempre dirigida para a posição de equilíbrio, o movimento é ***harmónico simples***

Movimento de um Sistema de uma Massa Ligada a uma Mola

Um bloco de massa *m* está ligado a uma mola, o bloco move-se livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito;

Quando a mola não está comprimida nem esticada, o bloco está na ***posição de equilíbrio***, $x = 0$



Lei de Hooke

Lei de Hooke:

$$F_s = - kx$$

F_s é a força restauradora

Aponta sempre para a posição de equilíbrio

Portanto, tem sinal oposto ao do deslocamento a partir do equilíbrio

k é a constante da mola

x é o deslocamento

Aceleração

Sendo a força elástica, dada pela lei de Hooke, a força resultante, pela 2.ª Lei de Newton:

$$F = ma$$

$$-kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Aceleração

$$a = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco;

O sentido da aceleração é oposto ao do deslocamento, a partir do equilíbrio;

Se um corpo se move com *movimento harmónico simples*, a sua aceleração é proporcional à posição e aponta no sentido oposto ao do deslocamento a partir da posição de equilíbrio.

Aceleração

$$a = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração ***não*** é constante:

- Não podemos, portanto, aplicar a equação da cinemática do movimento uniformemente acelerado;
- Se o bloco é largado da posição $x = A$, então a sua aceleração inicial é $-kA/m$;
- Quando o bloco passa na posição de equilíbrio, a sua aceleração é $a = 0$;
- O bloco continua a mover-se até $x = -A$, onde a sua aceleração é $+kA/m$.

Movimento do Bloco

O bloco vai oscilar entre $x = -A$ e $x = +A$;

Estes são os *pontos de retorno* do movimento;

A força é conservativa;

Na ausência de atrito, o movimento continuará indefinidamente;

Nos sistemas reais existe geralmente atrito, pelo que não irão oscilar indefinidamente.

Mola Vertical

Quando o bloco está pendurado numa mola vertical, o seu peso fará que a mola se distenda;

Se a posição de repouso da mola for definida como $x = 0$, podemos aplicar a mesma análise da mola horizontal.

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

Consideramos o bloco como sendo uma partícula;

Escolhemos o eixo dos *x* para a direcção em que ocorre a aceleração;

Aceleração: $$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Definimos: $$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Então: $$a = -\omega^2 x$$

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

Necessitamos de uma função que seja solução da equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

A função $x(t)$ deve ter 2.ª derivada igual à função original com sinal negativo e multiplicada por ω^2;

Só as funções seno e co-seno satisfazem estas condições;

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

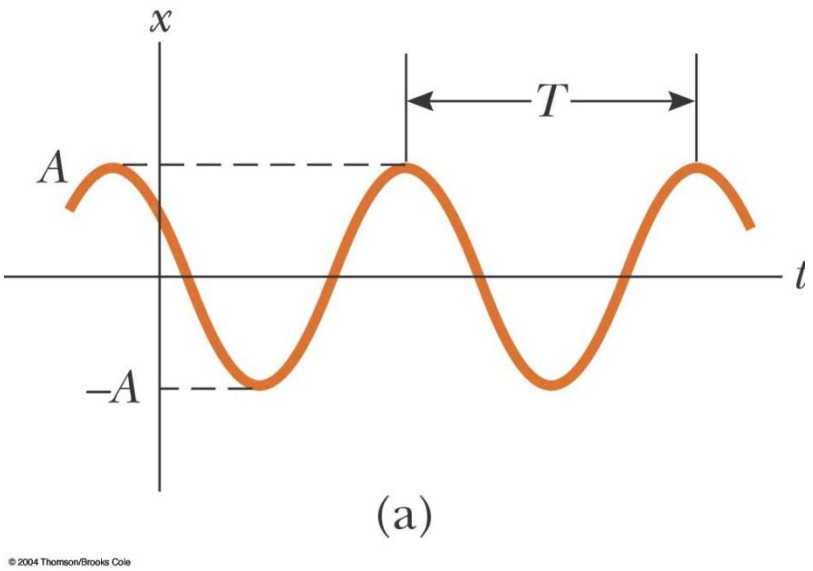
A solução mais geral é:

$$x\ t\ = a\cos\ \omega t\ + b\sin\ \omega t$$

Pode ser escrita na forma:

$$x\ t\ = A\cos\ \omega t + \phi$$

A, ω, ϕ são constantes



Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

A é a amplitude do movimento

É o valor máximo da posição (elongação) da partícula, no sentido positivo ou negativo

ω é a frequência angular

A unidade SI é rad s^{-1}

ϕ é a constante de fase ou o ângulo de fase inicial

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

A e ϕ são determinados apenas pela posição e velocidade da partícula para $t = 0$;

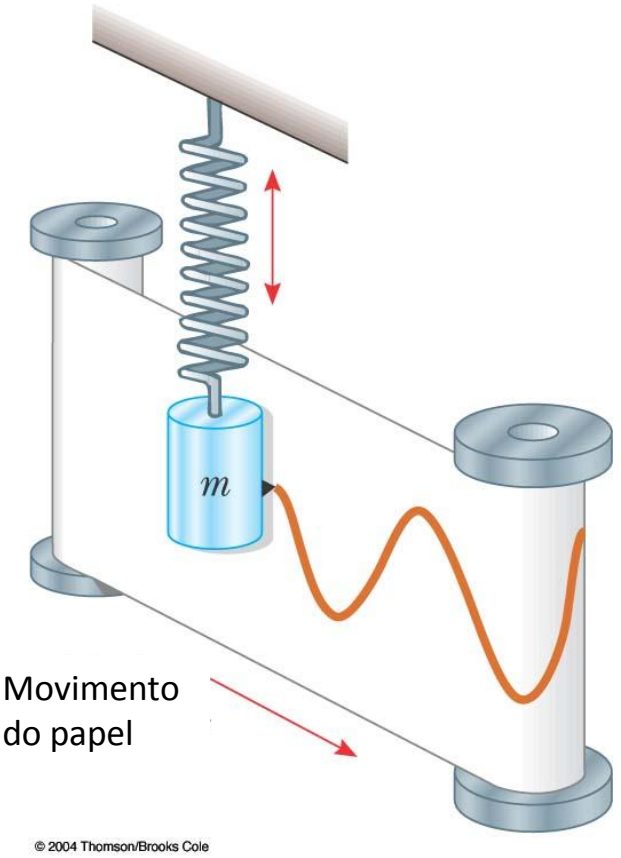
Se a partícula se encontra em $x = A$ para $t = 0$, então $\phi = 0$;

A ***fase*** do movimento é $(\omega t + \phi)$;

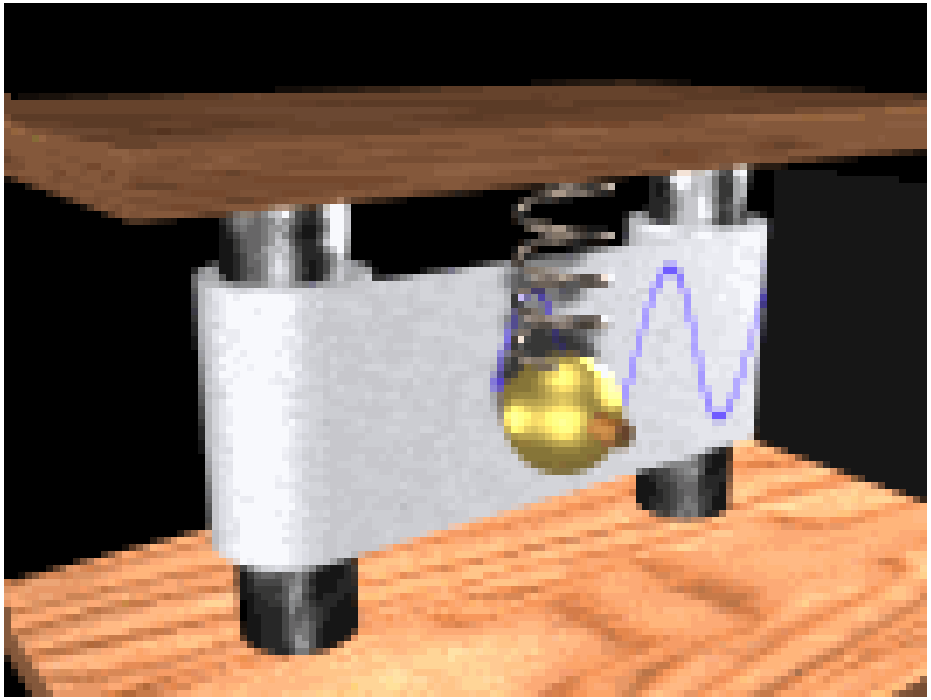
$x\,(t)$ é periódica e o seu valor é o mesmo sempre que ωt aumenta de 2π radianos.

Método experimental para demonstrar o MHS

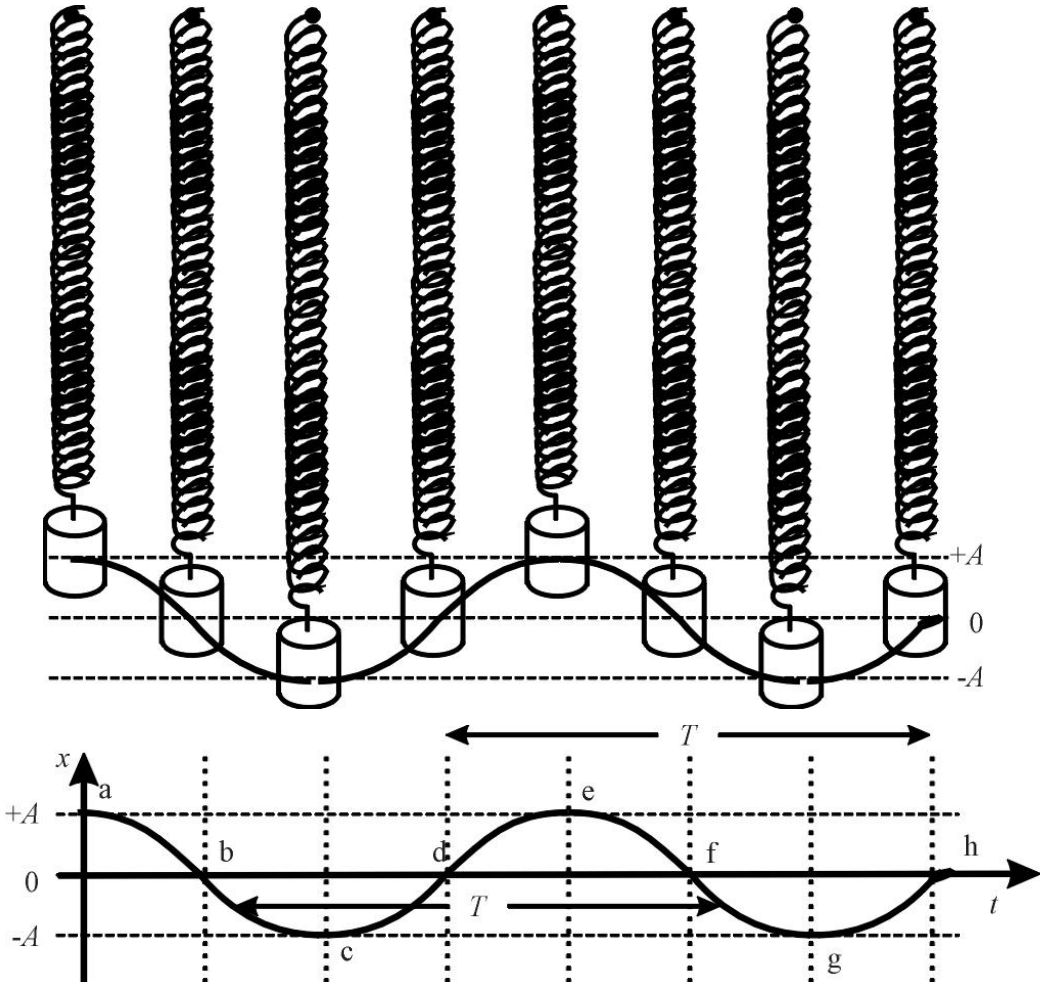
A caneta, ligada ao corpo que oscila, traça uma sinusóide no papel que está a mover-se.



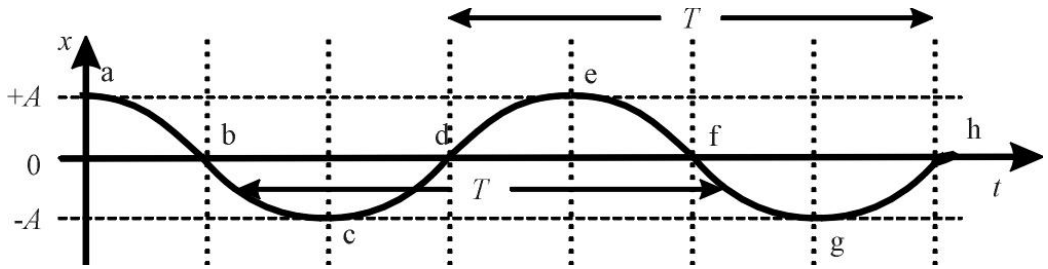
Método experimental para demonstrar o MHS



Método experimental para demonstrar o MHS



Período

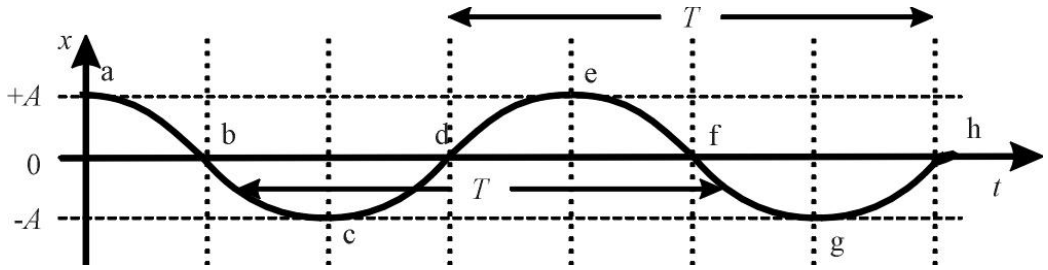


O ***período***, *T*, é o intervalo de tempo necessário para a partícula efectuar um ciclo do seu movimento

Os valores de *x, v* e *a*, da partícula no instante *t* são iguais aos valores de *x, v* e *a*, no instante *t* + *T*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequência



O inverso do período é a ***frequência***;

A frequência é o número de oscilações que a partícula efectua por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

A unidade é hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo

Sumário – Período e Frequência

A frequência angular pode ser escrita em termos da frequência e do período:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

O período e a frequência podem ainda ser escritos na forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Período e Frequência

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A frequência e o período dependem apenas da massa da partícula e da constante de força da mola;

Não dependem dos parâmetros do movimento (tempo, posição);

A frequência é maior para uma mola mais dura (valor elevado de *k*) e diminui quando aumenta a massa da partícula.

Equações do Movimento MHS

Recordemos que o movimento harmónico simples **não** é movimento uniformemente acelerado:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega\ \mathrm{t} + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega\ \mathrm{t}\ +\ \phi)$$

Valores Máximos of *v* e *a*

Como as funções seno e coseno oscilam entre ±1, podemos facilmente obter os valores máximos da velocidade e aceleração de um objecto com MHS:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\, A$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Representação Gráfica

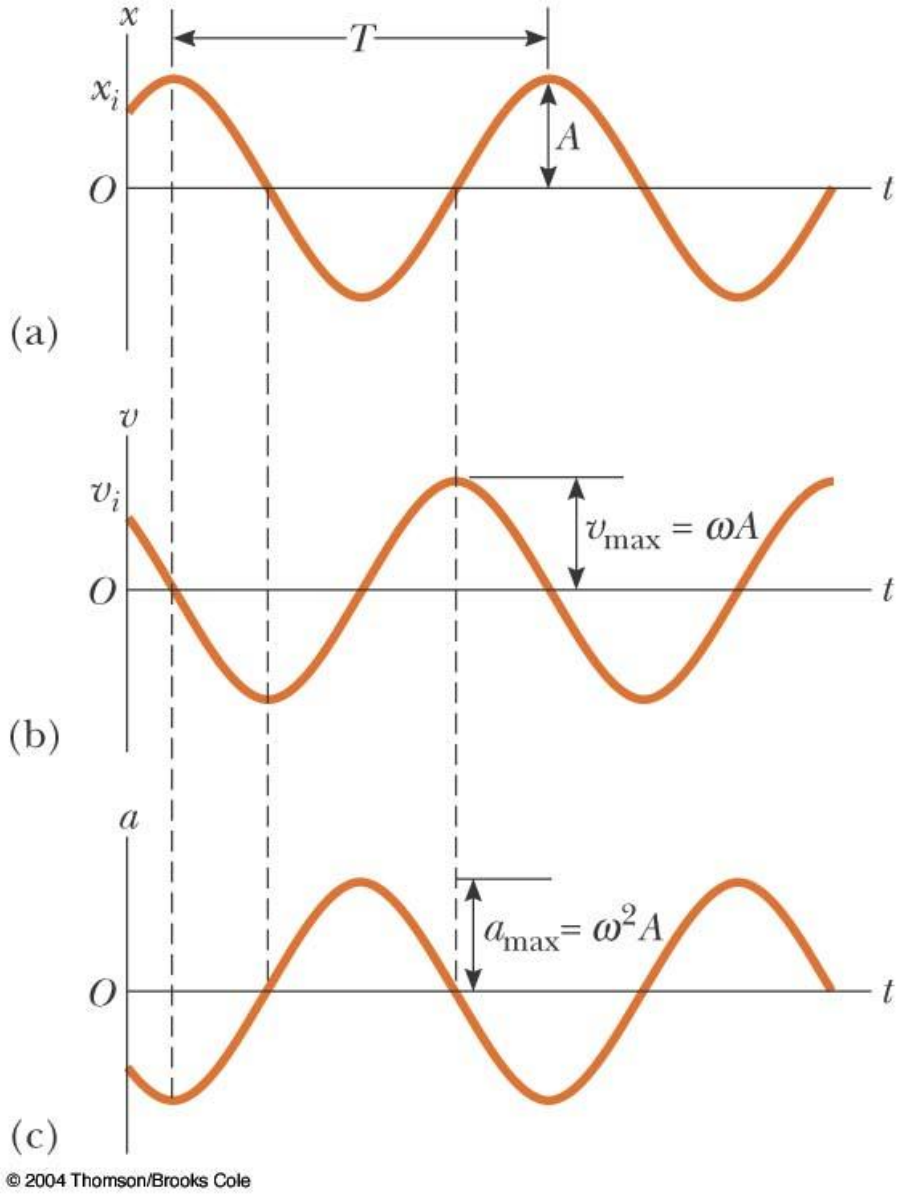
Os gráficos mostram:

(a) o deslocamento em função do tempo;

(b) a velocidade em função do tempo;

(c) a aceleração em função do tempo.

A velocidade está *desfasada* de 90º em relação ao deslocamento e a aceleração está *desfasada* de 180º em relação ao deslocamento.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

MHS Exemplo 1

As condições iniciais para $t = 0$ são:

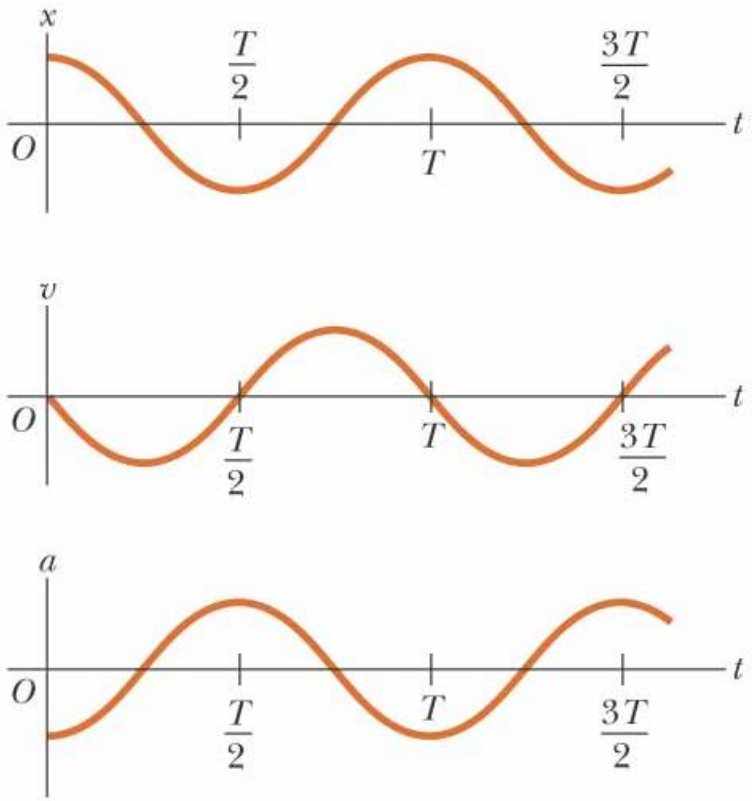
$x(0) = A$

$v(0) = 0$

Significa $\phi = 0$

Os extremos da aceleração são $\pm \omega^2 A$;

Os extremos da velocidade são $\pm \omega A$.



MHS Exemplo 2

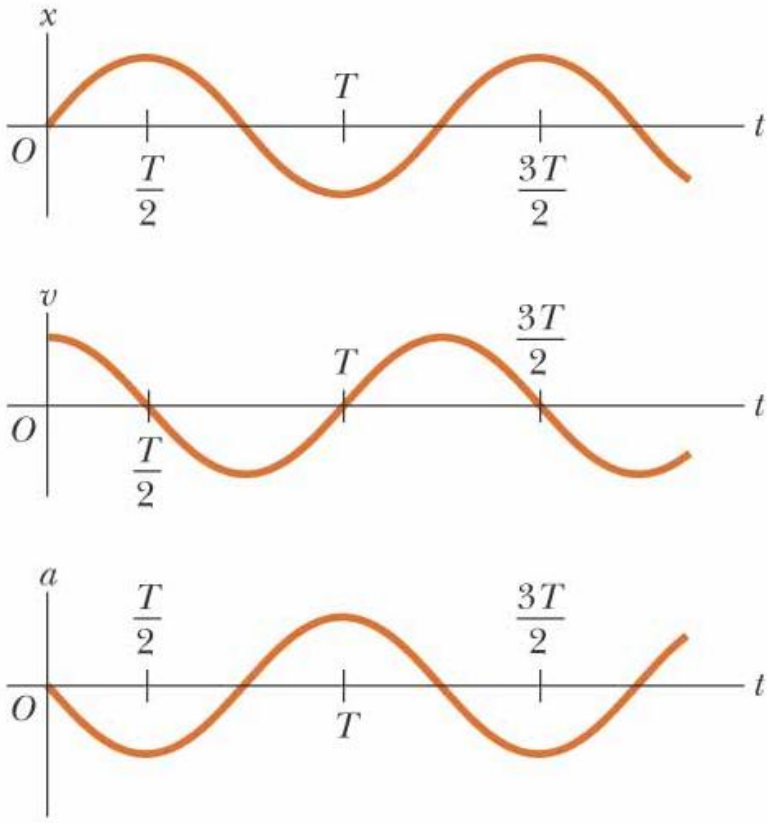
As condições para $t = 0$ são:

$x\,(0) = 0$

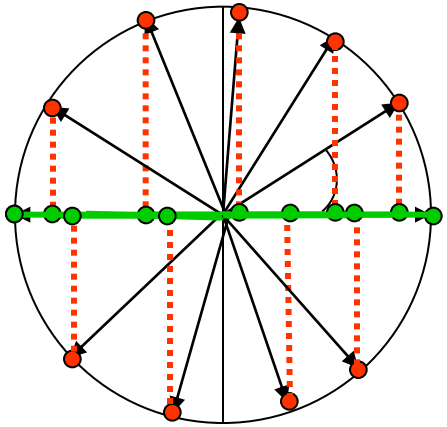
$v\,(0) = v_i$

Significa $\phi = -\pi/2$

O gráfico está desviado para a direita de um quarto de ciclo em relação ao gráfico de $x\,(0) = A$.



Fase e fase na origem

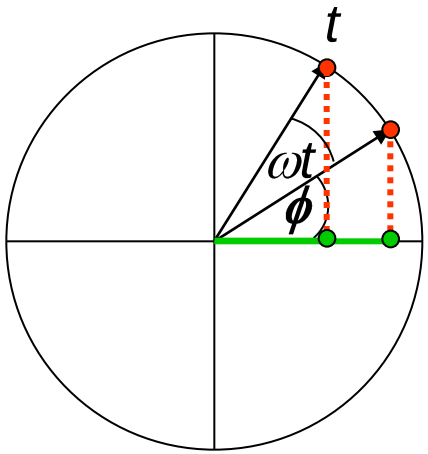


Circunferência de raio igual a *A*

Bola vermelha circula a velocidade angular igual a ω

Bola verde oscila com movimento dado por

$$x\ t\ = A\cos\ \omega t + \phi$$



$t = 0$ ⇒ $x(t=0) = x_0 = A\cos\phi$

Fase na origem; Amplitude; Condições Iniciais

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$
$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$x_0 = A\cos\phi$$
$$v_0 = -\omega A\sin\phi$$

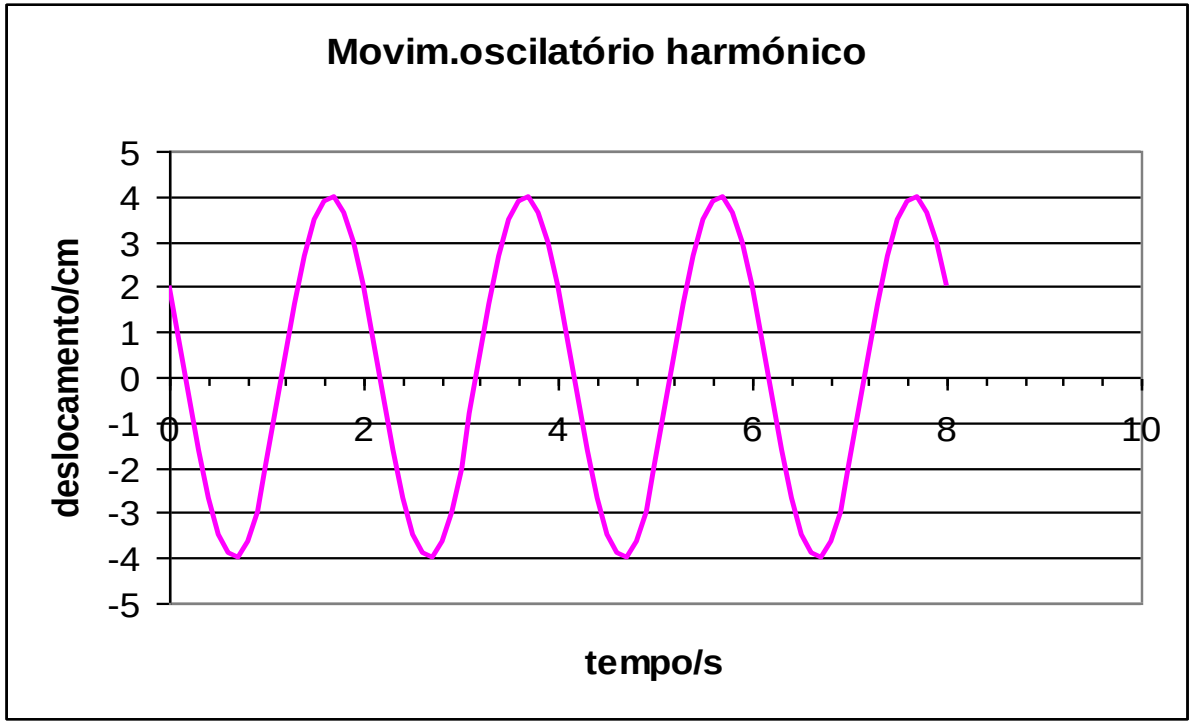
$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

Duas escolhas possíveis; escolha final depende de ter em conta o sinal do $\cos\phi$ ou $\sin\phi$

Depois de saber ϕ a amplitude A calcula-se de

$$A = x_0 / \cos\phi$$

MHS Exercício 1



$T = 2{,}0\,\text{s}$ $\omega = 2\pi / T = \pi\,\text{rad/s}$

$A = 4{,}0\,\text{cm}$ $\cos\delta = 0{,}5 \Rightarrow \delta = \pm 60^\circ$

Evolução da curva

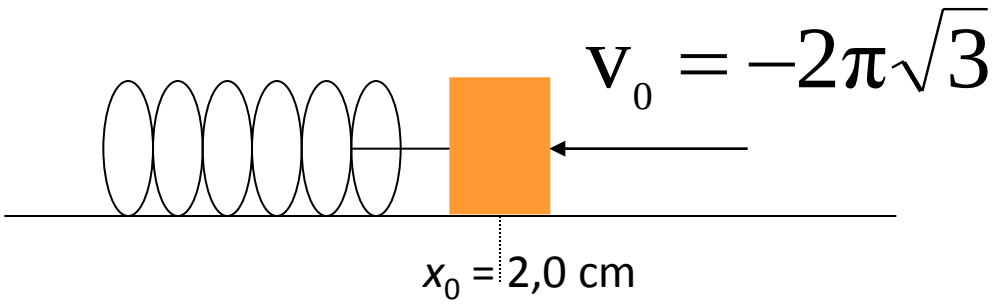
$\delta = +60^\circ$

MHS Exercício 2

$x_0 = 2{,}0\,\text{cm}$

$v_0 = -2\pi\sqrt{3}\,\text{cm/s}$

$\omega = \pi$



$x_0 = A\cos\phi$

$v_0 = -\omega A\sin\phi$

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{\pi 2} = \sqrt{3}$$

$$\phi = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \phi = \frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} \leftarrow \cos\phi > 0$$

$$A = x_0 / \cos\phi = 2{,}0 / 0{,}5 = 4{,}0\,\text{cm} \rightarrow x(t) = 4\cos(\pi t + \pi/3)$$